Développement : $\mathcal{A}_5$ est l'unique groupe simple d'ordre 60 :

[CVA] - p 129

Dev : On admettra que $\mathcal{A}_5$ est un groupe simple d'ordre 60.

On veut montrer que tout groupe simple d'ordre 60 est isomorphe au groupe alterné $\mathcal{A}_5$.

1) On montre que si ϕ est un morphisme de grp. $G \longrightarrow H$.
Alors ϕ envoie $D(G)$ dans $D(H)$ (grp. dérivées de G et H)

2) Soit G un groupe simple d'ordre 60. On montre qu'il possède six 5-sylow

3) On en déduit qu'il existe un morphisme injectif $\phi : G \hookrightarrow \mathfrak{S}_6$.

4) On en déduit que $G \hookrightarrow \mathcal{A}_6$. En assimilant G à son image, on détermine le cardinal de $\mathcal{A}_6/G$.

5) On montre en faisant agir $\mathcal{A}_6$ sur l'ensemble $\mathcal{A}_6/G$ des classes, que G s'injecte dans $\mathfrak{S}_5$, puis, dans $\mathcal{A}_5$

(compliqué)

---

preuve :

1) Par définition le groupe dérivé $D(G)$ de G est engendré par les commutateurs : $[g_1, g_2] := g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$ $\forall g_1, g_2 \in G$.

Or ϕ étant un morphisme de grp. il envoie donc ces générateurs de $D(G)$ sur des éléments de $D(H)$.

En effet, Pour $g_1, g_2 \in G$, on a que : $\phi(g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1})$
$$= \phi(g_1)\phi(g_2)\phi(g_1)^{-1}\phi(g_2)^{-1} \in D(H).$$
✓.

Donc il envoie $D(G)$ dans $D(H)$.

~~Donc il envoie $D(G)$ dans $D(H)$~~

2) Soit n_5 le nombre de 5-sylow de G.

Par les Théorèmes de Sylow, on a que $\begin{cases} n_5 \mid \frac{|A_5|}{5} = \frac{60}{5} = 12 \\ \text{et} \\ n_5 \equiv 1 [5] \end{cases}$.

~~et $n_5 \equiv 1 [5]$~~

Donc $n_5 = 1, \cancel{2}, \cancel{3}, 6, \cancel{12}$

Si $n_5 = 1$: alors le seul 5-sylow de G est distingué.

(Par le $2^{ième}$ Thm des Sylows, Tous les p-sylows sont conjugués entre eux $\Leftrightarrow \forall P, P' \in$ p-sylow, $\exists\, g \in G$ tq $gPg^{-1} = P'$)

Donc si il n'y a qu'un p-sylow, alors $\forall g \in G$, $gPg^{-1} = P$. (Donc P est distingué)

Or G est simple, donc c'est impossible.

On en déduit que $\boxed{n_5 = 6}$.

3) (Idée : On construit un premier morphisme provenant de l'act : ($G \times$ 5-sylow $\to$ 5-sylow))

On fait agir G par conjugaison sur l'ensemble des 5-sylow.

D'après la question précédente il y a 6, 5-sylow, donc cette action revient à créer un morphisme de G dans $\mathfrak{S}_6$.

En effet,

$$\begin{aligned} G \times \{P_1, P_2, \dots, P_6\} &\longrightarrow \{P_1, \dots, P_6\} \\ (g, S) &\longmapsto gSg^{-1} \end{aligned}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{aligned} \phi : G &\longrightarrow \mathfrak{S}_{\{P_1, \dots, P_6\}} \simeq \mathfrak{S}_6 \\ g &\longmapsto \phi(g) \end{aligned}$$

(où ϕ est un morphisme)

On pose : $\phi : G \longrightarrow \mathfrak{S}_{\{P_1,..,P_6\}} \simeq \mathfrak{S}_6$ le morphisme de cette action. ②.

On montre que ce morphisme est injectif.

Pour cela, on montre que son noyau est trivial. Or le noyau étant distingué, et G étant simple, le noyau est soit trivial soit G tout entier.

Par l'absurde, si $Ker(\phi) = G$ cela veut dire que l'action par conjugaison de G sur $\{P_1,.., P_6\}$ est triviale.

C-à-d : $\forall g \in G$, $\forall S \in \{P_1,..,P_5\}$, $gSg^{-1} = S$.

Cela contredit le Théorème de Sylow. (qui dit que l'action de G sur ses 5-sylow est transitive)

Thm 2 : Tous les p-sylows de G sont conjugués
(=) l'act par conjuguaison agit transitivt. sur les p-sylows.

Le morphisme d'action $\phi : G \longrightarrow \mathfrak{S}_{\{P_1,..,P_6\}} \simeq \mathfrak{S}_6$ est donc injectif.

4) Par la question 1) on a que ϕ envoie $D(G)$ dans $D(\mathfrak{S}_6)$

Pour montrer que $G \hookrightarrow \mathcal{A}_6$, il suffira de prouver que $D(G) = G$ et $D(\mathfrak{S}_6) \subset \mathcal{A}_6$ (Direct puisque tous les commutateurs sont de signature 1.)

(En effet, $\forall g, g' \in G$, $\varepsilon(gg'g^{-1}g'^{-1}) = \varepsilon(g).\varepsilon(g')\varepsilon(g^{-1})\varepsilon(g'^{-1})$
$= 1$

Et Par déf le groupe alterné $\mathcal{A}_5 \subset \mathfrak{S}_5$ est engendré par les éléments de signature $\varepsilon(\sigma) = 1$

On montre maintenant que $D(G) = G$. On rapelle que $D(G)$ est un sous-grp. distingué de G. (Thm). (premier : $\forall g, g', g''$, $g[g', g'']g^{-1} = [gg'g^{-1}, gg''g^{-1}]$.
⊕ commutateurs engendrant $D(G)$)

Comme G est simple, il ne reste plus qu'à montrer que $D(G) \neq \{id\}$.

On suppose par l'absurde que $D(G) = \{id\}$.

Alors on aurait en particulier $[g, g'] = e$ $\forall g, g' \in G$. (~~G est abélien~~)

C-à-d G est abélien.

Or un groupe abélien est simple ssi il est d'ordre premier.

Méthode 1

En effet, dans le cas abélien, tout sous-grp. est distingué, et donc, tout élément non trivial engendre le groupe tout entier, en particulier, le groupe est cyclique (et simple !) donc d'ordre premier.

Méthode 2

~~On montre que G est un groupe a~~

On a : Pour G un groupe abélien. G est simple $\Leftrightarrow$ G est d'ordre premier

on mq. G n'est pas simple $\Leftrightarrow$ G n'est pas d'ordre premier.

en effet, G n'est pas simple $\Leftrightarrow$ $\exists H \trianglelefteq G \setminus \{e\}$ et $\setminus G$.

$\Leftrightarrow$ $\exists H \trianglelefteq G$ tq $|H| \mid |G|$ et $|H| \neq 1$, $\neq |G|$

$\Leftrightarrow$ $|G|$ n'est pas premier

Car : G est abélien. Donc " $\Leftarrow$ " Si $|G|$ n'est pas premier, par Cauchy $\exists x \in G$ tq $o(x) \mid |G|$. On pose $\langle x \rangle$ qui est un sous-grp. simple de G qui divise $|G|$.

Scanné avec CamScanner

~~Conclusion, on a montré qu'il existait un morphisme injectif (par la quest. précédente) de G vers A_6~~

En conclusion, on a montré que : i) $\exists\, \phi : G \hookrightarrow \mathfrak{S}_6$

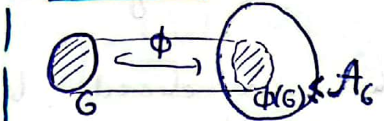
(*) ii) $\phi(D(G)) \subset D(\mathfrak{S}_6) \subset A_6$
$\ \ \overset{\shortparallel}{\phi(G)}$

(*) Rq : Ce point était essentiel car même si ($A_6 \hookrightarrow \mathfrak{S}_6$ et $G \hookrightarrow \mathfrak{S}_6$ où $|G|\,\big|\,|A_6|$) cela n'implique pas nécessairement que $G \hookrightarrow A_6$.

Donc : on a montré l'existence d'un morphisme :

$$\phi : G \hookrightarrow A_6$$

Visualisation :



on peut donc assimiler G à un sous-grp. de A_6 d'indice :

$$\boxed{\left|A_6/G\right| = \frac{360}{60} = 6}$$

5) (Idée : on construit un deuxième morphisme provenant de l'act : $(A_6 \times A_6/G \to A_6/G)$)

On rappelle tout d'abord qu'en toute généralité, si H est un ss-grp. d'un grp. G, on dispose alors d'une action de G sur l'ensemble G/H des classes à gauche définie par :

$$g.(g'H) = (gg').H \quad \forall g, g' \in G.$$

Cette action est transitive, (car $g''g'^{-1}$ envoie $g'H$ sur $g''H$ $\forall g', g'' \in G$)

Ici on obtient que A_6 agit transitivement sur A_6/G (qui est de cardinal 6)

On récupère donc un morphisme $\psi : A_6 \longrightarrow \mathfrak{S}_{A_6/G} \simeq \mathfrak{S}_6$

Pourquoi A_6 est simple ??

(*) Comme A_6 est simple, montrer que ce morphisme est injectif revient à montrer que le morphisme n'est pas trivial.

Mais si le morphisme était trivial, l'action ~~[illegible]~~ ne pourrait pas être transitive, puisque toute orbite serait singletonne.

Donc Ψ est nécessairement non trivial

Donc Ψ est nécessairement injective.

On dispose donc d'un morphisme injectif $\Psi : \mathcal{A}_6 \hookrightarrow \mathfrak{S}_6$.

Or, si $g \in G$, il fixe la classe d'élément neutre $\bar{e} = eG = G$:

$$\Psi(g)(\bar{e}) = g.(eG) = G = \bar{e}$$

Ψ envoie donc g sur $\Psi(g) \in \mathfrak{S}(\mathcal{A}_6/G) \simeq \mathfrak{S}_6$, qui de plus, stabilise un élément, la classe $\bar{e}$ du neutre.

Or, on voit facilement que le stabilisateur d'un élément dans $\mathfrak{S}_n$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$.

$\boxed{\begin{array}{l}\text{En effet : Pour } \mathrm{Stab}_{\mathfrak{S}_n}(x) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(x) = x\} \text{ où } x \in [\![1,n]\!] \\ \text{. SPDG, on peut supposer } x = n. \\ \text{Donc } \mathrm{Stab}_{\mathfrak{S}_n}(n) \text{ est l'ensemble des permutations qui stabilisent } n. \\ \text{c-à-d c'est l'ensemble des permutations de } [\![1,n-1]\!]. \\ \text{D'où : } \mathrm{Stab}_{\mathfrak{S}_n}(n) \simeq \mathfrak{S}_{n-1}\end{array}}$

Ainsi, Ψ envoie G injectivement dans $\mathfrak{S}_5$.

Comme dans 1), $D(G) = G$ s'envoie injectivement dans $D(\mathfrak{S}_5) \subset \mathcal{A}_5$.

Et on a un isomorphisme par un argument de cardinalité.
(Car : $|G| = 60 = |\mathcal{A}_5|$)

Bref : $\boxed{G \simeq \mathcal{A}_5}$

$\square$